TD n° 5 – Théorèmes du collier

Les *théorèmes du collier* sont deux théorèmes caractérisant des propriétés locales des surfaces de Riemann. L'idée générale est que toute géodésique fermée assez petite admet un grand voisinage tubulaire de la forme d'un cylindre topologique ; un exemple naturel est celui d'une courbe fermée qui fait le tour d'une anse.

Exercice 1. *Premier théorème*

Le *premier théorème du collier* est le suivant : Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, et soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des géodésiques fermées simples disjointes sur S. Alors :

(i) $m \leq 3g - 3$,

(ii) Il existe des géodésiques simples fermées $\gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_{3g-3}$, telles que $S \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{3g-3}\}$ soit la réunion de pantalons topologiques.

(iii) Les colliers $C(\gamma_i) = \{p \in S : \mathrm{dist}(p, \gamma_i) \leq w(\gamma_i)\}$ de longueurs

$$w(\gamma_i) = \sinh^{-1}(1/\sinh(\tfrac{1}{2}\ell(\gamma_i)))$$

sont deux à deux disjoints.

(iv) Chaque $C(\gamma_i)$ est isométrique au cylindre $[-w(\gamma_i), w(\gamma_i)] \times S^1$ muni de la métrique riemannienne $ds^2 = d\rho^2 + \ell(\gamma_i)^2 \cosh^2 \rho dt^2$.

Démontrer ce théorème, en admettant le résultat suivant : toute courbe fermée c d'homotopie non triviale sur une surface hyperbolique compacte satisfait les propriétés suivantes.

— la classe d'homotopie libre de c contient une unique géodésique γ.

— Soit γ est dans ∂S, soit $\gamma \cap \partial S = \varnothing$.

— Si c est simple alors γ est simple

— Si c est une composante de bord non lisse, alors γ et c bordent un anneau plongé.

Exercice 2. *Rayon d'injectivité*

Pour toute surface de Riemann compacte S de genre $g \geq 2$, et pour tout $p \in S$, on pose

$$U_p(r) = \{q \in S : d(p, q) < r\}$$

la "boule" de centre p et de rayon r pour la distance hyperbolique. Le *rayon d'injectivité* de S en p est

$$r_p(S) = \sup\{r > 0 : U_p(r) \text{ est isométrique à un disque de rayon } r \text{ dans } \mathbb{H}^2\}.$$

1. Montrer que $r_p(S) = \frac{1}{2}\ell(\gamma_p)$, où γ_p est la plus petite géodésique fermée qui passe par p.
2. Montrer que le *rayon d'injectivité* de S, défini par

$$r_{\mathrm{inj}}(S) = \inf_{p \in S} r_p(S),$$

vérifie $r_{\mathrm{inj}}(S) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$, où γ est la plus petite géodésique fermée.

3. Montrer que les géodésiques considérées dans les questions 1 et 2 sont simples.

Exercice 3. *Deuxième théorème*

Le *deuxième théorème du collier* est le suivant : soit S une surface de Riemann hyperbolique compacte de genre $g \geq 2$, et soit $\beta_1, \ldots, \beta_k$ la famille de *toutes* les géodésiques simples fermées de longueur inférieure ou égale à $2\sinh^{-1}(1)$. Alors $k \leq 3g - 3$, et

(i) les géodésiques $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sont deux à deux disjointes

(ii) $r_p(S) > \sinh^{-1}(1)$ pour tout $p \in S \setminus \{\bigcup_i C(\beta_i)\}$

(iii) Si $p \in C(\beta_i)$ et $d = d(p, \partial C(\beta_i))$, alors

$$\sinh(r_p(S)) = \cosh(\frac{1}{2}\ell(\beta_i))\cosh(d) - \sinh(d).$$

1. Démontrer que si γ_1, γ_2 sont deux géodésiques sur S qui se croisent transversalement, telles que γ_1 soit simple, alors

$$\sinh(\frac{1}{2}\ell(\gamma_1))\sinh(\frac{1}{2}\ell(\gamma_2)) > 1.$$

   Indication : regarder leur relèvement dans $\mathbb{H}^2$.

2. Démontrer le théorème.

Exercice 4. Soit S une surface compacte de genre $g \geq 2$. Montrer que toute géodésique primitive non simple de S a une longueur plus grande que 1.